

Научная статья

УДК 531.3, 532.1

doi: 10.17223/19988621/92/9

Численное моделирование обтекания высокоскоростным потоком воды тела вращения с затупленным передним торцом

Александр Николаевич Ищенко¹, Андрей Александрович Аксенов²,
Владислав Сергеевич Акользин³, Илья Михайлович Бирюков⁴,
Андрей Владимирович Чупашев⁵, Алена Сергеева Шестопалова⁶,
Владимир Васильевич Шмелев⁷

^{1, 3, 4, 5, 6} Томский государственный университет, Томск, Россия

^{2, 7} ООО «ТЕСИС», Москва, Россия

¹ ichan@niipmm.tsu.ru

² andrey@tesis.com.ru

³ akolzin99@inbox.ru

⁴ ilya.biryukov.2072@mail.ru

⁵ chupashevav@niipmm.tsu.ru

⁶ shestopalova@ff.tsu.ru

⁷ shvv@flowvision.ru

Аннотация. На примере квазистационарной задачи обтекания высокоскоростным потоком воды тела вращения с затупленным передним торцом проведено экспериментально-теоретическое исследование с целью выявить основные процессы и явления, оказывающие влияние на профиль суперкаверны вокруг тела при заданных условиях. Проведена верификация программного комплекса FlowVision в задаче высокоскоростного обтекания водой затупленных тел вращения при наличии развитых кавитационных явлений в потоке.

Ключевые слова: коэффициент сопротивления, вода, гидробаллистическая трасса, суперкавитация, каверна, ударник, FlowVision, численное моделирование

Благодарности: Результаты были получены в рамках выполнения государственного задания Минобрнауки России, проект № FSWM-2020-0032.

Для цитирования: Ищенко А.Н., Аксенов А.А., Акользин В.С., Бирюков И.М., Чупашев А.В., Шестопалова А.С., Шмелев В.В. Численное моделирование обтекания высокоскоростным потоком воды тела вращения с затупленным передним торцом // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2024. № 92. С. 101–113. doi: 10.17223/19988621/92/9

Original article

Numerical modeling of high-speed water flow around a body of revolution with a blunt front end

Aleksandr N. Ishchenko¹, Andrey A. Aksenov², Vladislav S. Akol'zin³,
Il'ya M. Biryukov⁴, Andrey V. Chupashev⁵, Alena S. Shestopalova⁶,
Vladimir V. Shmelev⁷

^{1, 3, 4, 5, 6} Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation

^{2, 7} OOO "TESIS", Moscow, Russian Federation

¹ ichan@niipmm.tsu.ru

² andrey@tesis.com.ru

³ akolzin99@inbox.ru

⁴ ilya.biryukov.2072@mail.ru

⁵ chupashevav@niipmm.tsu.ru

⁶ shestopalova@fj.tsu.ru

⁷ shvv@flowvision.ru

Abstract. In this paper, a quasi-stationary problem of high-speed water flow around a body of revolution with a blunt front end is solved theoretically and experimentally to identify the main processes and phenomena affecting the supercavity profile around the body under given conditions. It is shown that the considered problem can be reduced to a mechanical problem of determining the motion of an ideal incompressible fluid under the action of given forces. The FlowVision software package has been verified using the problem of high-speed water flow around blunt bodies of revolution in the presence of cavitation phenomena in the flow. The pressure and radial velocity distributions, as well as the supercavity profile shapes are obtained for free-stream flow velocities varying from 113 to 356 m/s. The average drag coefficient of the disk cavitator ($C_{x0} = 0.81$), which has been obtained numerically, complies with that obtained experimentally. Qualitative and quantitative agreement of the numerical and experimental results in terms of the supercavity profile around the projectile is derived within the accepted error of localization of the supercavity profile boundary from photographs..

Keywords: numerical modeling, drag coefficient, water, hydroballistic track, supercavitation, cavitation, cavity, projectile, FlowVision

Acknowledgments: These results were obtained within the state assignment of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (project No. 0721-2020-0032).

For citation: Ishchenko, A.N., Aksenov, A.A., Akol'zin, V.S., Biryukov, I.M., Chupashev, A.V., Shestopalova, A.S., Shmelev, V.V. (2024) Numerical modeling of high-speed water flow around a body of revolution with a blunt front end. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 92. pp. 101–113. doi: 10.17223/19988621/92/9

Введение

Высокоскоростное движение в воде обычно сопровождается кавитационными явлениями и образованием свободных границ, усложняющих картину обтекания тела потоком. В случае больших скоростей (десятки метров в секунду и выше)

пузырьковая кавитация уступает место развитой кавитации с образованием свободных границ, образующих протяженную полость, в которую тело может полностью поместиться. Такой режим движения принято называть суперкавитирующим. Длина суперкаверны может на порядки превосходить длину кавернообразующего тела и составлять десятки и сотни метров. Но с точки зрения изучения движения по траектории наибольший интерес представляет профиль суперкаверны непосредственно вокруг тела, так как сложные нестационарные эффекты, связанные с закрытием суперкаверны, остаются далеко позади и не воздействуют на него.

Существуют различные подходы, позволяющие выяснить профиль образующейся суперкаверны. Для нестационарной суперкаверны используется подход, предложенный Г.В. Логвиновичем, в котором суперкаверна рассматривается в виде множества независимых сечений, развивающихся по одному закону [1]. Аналогичные результаты можно получить с помощью полуэмпирической аппроксимации для стационарных суперкаверн [2]. Такие подходы хорошо описывают профиль суперкаверны за кавитатором в невозмущенном потоке жидкости. Для построения профиля суперкаверны за сложными формами, учета влияния на суперкаверну различных возмущающих факторов в потоке или решения задач взаимодействия тела с поверхностью суперкаверны на передний план выходят методы на основе вычислительной гидродинамики, позволяющие наиболее полно рассмотреть картину протекающих при высокоскоростном суперкавитационном обтекании процессов [3–5].

Ввиду относительно высокой скорости звука в воде, высокой скорости потока и очень малого размера расчетных ячеек в области отрыва струй класс задач, связанный с прямым моделированием суперкавитирующего движения твердого тела, характеризуется существенными затратами реального времени на решение, особенно при использовании динамических сеток типа «химера». Для сокращения затрат времени на решение целесообразно обоснованно выявить наиболее значимые процессы в потоке, оказывающие основное влияние на результат моделирования, и использовать новые гибкие подходы для дискретизации непрерывно изменяющейся геометрии расчетной области. Например, оригинальный подход для построения сетки с учетом непрерывно меняющихся границ потока реализован на базе отечественного программного комплекса для междисциплинарного моделирования FlowVision [6], особенностью которого является применение структурированной локально-адаптивной сетки. Расчетная сетка строится в автоматическом режиме, а точность разрешения сеткой геометрической модели любой сложности обеспечивается с помощью технологии подсеточного разрешения геометрии [7].

В данной работе на примере квазистационарной задачи обтекания высокоскоростным потоком воды тела вращения с затупленным передним торцом проведено экспериментально-теоретическое исследование с целью выявить основные процессы и явления, оказывающие влияние на профиль суперкаверны вокруг тела при скоростях 113 и 356 м/с. Также проведена верификация программного комплекса FlowVision в задаче высокоскоростного обтекания водой затупленных тел вращения при наличии развитых кавитационных явлений в потоке.

Объект исследования

На базе Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета производятся экспериментально-

теоретические исследования высокоскоростного движения твердых тел в различных средах. В частности, рассматриваются вопросы, связанные с суперкавитирующим движением ударников в воде. Гидробаллистический комплекс института с длиной водного участка траектории более 10 м оснащен высокоскоростной видеоаппаратурой и лабораторными баллистическими установками, позволяющими ускорять ударники в широком диапазоне скоростей.

Рассматривается поступательное движение в воде инертного ударника с плоским дисковым кавитатором диаметром D . Движение происходит в горизонтальной плоскости на глубине $h_0 = 0.25$ м в покоящейся пресной воде при температуре $T_0 = 293$ К. По ходу перемещения по подводной траектории ударник преодолевает два участка, на которых производится видеосъемка и измерение средней скорости его движения. На рис. 1 показаны фотографии ударника и суперкаверны, образующейся при движении ударника в воде со скоростью $V = 113$ и 356 м/с.

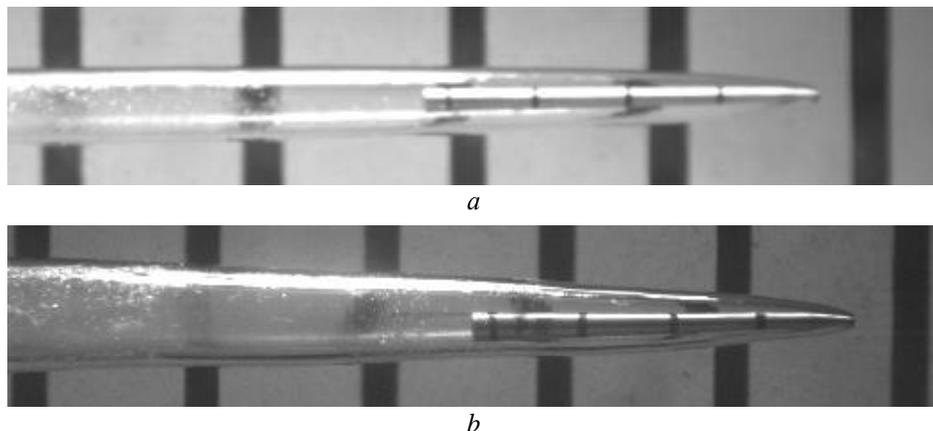


Рис. 1. Суперкавитирующее движение ударника в воде при скоростях:
 $a - 113$ м/с; $b - 356$ м/с

Fig. 1. Supercavitating motion of the projectile in water at a velocity of:
 (a) 113 and (b) 356 m/s

В ходе проведения эксперимента были получены высокоскоростные видеозаписи рассматриваемого процесса, из которых извлечены количественные характеристики профилей суперкаверн для указанных значений скоростей. Полученные данные использовались для оценки применимости теоретических подходов и верификации численных моделей, построенных в программном комплексе FlowVision для описания процессов высокоскоростного обтекания твердых тел в воде.

Физико-математическая постановка задачи

Для формирования системы уравнений математической модели исследуемого процесса необходимо обоснованно выделить круг значащих процессов и явлений, которые целесообразно учитывать при решении указанного круга задач.

В случае тел с плавной образующей в передней части (сферической, оживальной) линия отрыва струй (образования свободных границ) однозначно не фикси-

руется и может перемещаться в зависимости от значений параметров течения [8]. В этом случае для моделирования картины течения вокруг тела потребовалось бы учитывать турбулентные явления в прилегающем к телу пограничном слое [9], которые позволили бы правильно сформировать границу отрыва потока от тела. В данной работе рассматривается тело (ударник), переднему торцу которого специально придана форма диска (кавитатор), что служит однозначной фиксацией линии отрыва потока – образования свободной границы раздела сред на гранях кавитатора.

Как видно из приведенных на рис. 1 картин образования каверн, последние имеют гладкую и оптически прозрачную поверхность, без видимых следов турбулизации границ. Таким образом, в случае, когда ударник полностью погружен в суперкаверну, возможно моделирование процесса его обтекания без привлечения модели турбулентности. Важно подчеркнуть, что этот подход справедлив для отмеченного выше класса задач, в которых не учитываются такие процессы, как смыкание суперкаверны за ударником или глиссирование ударника частью боковой поверхности по границе суперкаверны.

Оценка температуры T_i торможения в точке нулевой скорости, расположенной в центре кавитатора [10], для случая на рис. 1, б дает следующий результат:

$$T_i = T_0 + \frac{V^2}{2c_p} \approx 308 \text{ К}, \quad (1)$$

где: c_p – удельная теплоемкость воды при постоянном давлении, T_0 , V – температура и скорость набегающего потока. Получаем, что в данном случае разница между температурой потока и температурой в пограничном слое жидкости в центре кавитатора составляет не более 15 К. В реальности данная величина будет еще меньше вследствие теплообмена с металлическим ударником. Это показывает, что изменение внутренней энергии в потоке мало и не повлияет на картину течения и образования каверны, что позволяет не учитывать влияние процессов теплопереноса на профиль суперкаверны вокруг ударника.

Одним из основных параметров, характеризующих суперкавитационные течения, является число кавитации

$$\sigma = \frac{2\Delta P}{\rho V^2}, \quad (2)$$

где: ΔP – разница между давлением на бесконечности и в каверне, ρ – плотность жидкости. Значения величины числа кавитации менее единицы указывают на наличие кавитационных явлений в потоке, а при $\sigma \rightarrow 0$ наблюдаются развитые кавитационные явления, такие как суперкаверны. Для приведенных на рис. 1 примеров суперкавитационного обтекания число кавитации равно $\sigma = 0.016$ (см. рис. 1, а) и 0.0016 (см. рис. 1, б). Для основных прочих критериев подобия течений жидкости – Рейнольдса, Фруда и Вебера – получается

$$\text{Re} = \frac{\rho V D}{\eta} \approx 2 \cdot 10^5, \quad (3)$$

$$\text{Fr} = \frac{V^2}{g D} \approx 7 \cdot 10^5, \quad (4)$$

$$\text{We} = \frac{\rho D V^2}{\tau} \approx 4 \cdot 10^5. \quad (5)$$

Порядки величин Re , Fr и We на нижней границе рассматриваемого скоростного диапазона указывают на подавляющее преобладание сил инерции над вязкими силами, силой тяжести и поверхностным натяжением в жидкости, что существенно упрощает теоретическое изучение процесса и приводит к механической задаче определения движения идеальной несжимаемой жидкости под действием заданных сил [11]. В этом случае для численного моделирования течения жидкости вокруг ударника воспользуемся изотермической моделью идеальной несжимаемой жидкости в следующем виде:

$$\begin{cases} \nabla \mathbf{V} = 0, \\ \rho \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = -\nabla p, \\ \frac{\partial T}{\partial t} = 0, \end{cases} \quad (6)$$

где: t – время, \mathbf{V} – вектор скорости, p – давление, T – температура, ρ – плотность жидкости, η – динамическая вязкость, g – ускорение свободного падения, τ – коэффициент поверхностного натяжения.

В программном комплексе FlowVision моделирование свободной поверхности производится модифицированным методом VoF, базовая идея которого приведена в [12]; уравнение переноса фазы имеет вид:

$$\frac{df}{dt} + \mathbf{V} \nabla f = 0, \quad (7)$$

где: f – объемная доля фазы в ячейке: $f = 1$ – ячейка, полностью занятая жидкостью, $f = 0$ – «пустая» ячейка, $0.01 < f < 0.99$ соответствует поверхностной ячейке. В каждой поверхностной ячейке проводятся реконструкция и генерация 2 ячеек с $f = 1$ и $f = 0$ соответственно (рис. 2). Применение данной процедуры позволяет при всех равных условиях заметно повысить точность определения как границы раздела сред, так и физических параметров течения, связанных с последней.

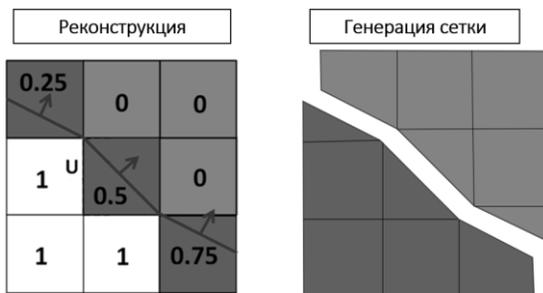


Рис. 2. Реконструкция границы раздела сред ($0.01 < f < 0.99$) в поверхностной ячейке и генерация сетки

Fig. 2. Reconstruction of the interface between the media ($0.01 < f < 0.99$) in the surface cell and generation of the grid

Математическая модель VoF реализована в рамках межфазового взаимодействия сред «сплошная среда–вакуум» [6]. Предполагается, что кинетическая энергия вещества внутри суперкаверны, имеющего значительно меньшую плотность,

пренебрежимо мала в сравнении с кинетической энергией жидкости, и на границу раздела сред (свободной поверхности) вокруг кавитирующего тела газодинамические процессы внутри полости влияют незначительно. Такой подход позволяет значительно сократить количество ячеек, в которых производится перерасчет газодинамических параметров течения, так как область внутри поверхности суперкаверны исключается из расчета. Моделирование образования суперкаверны выполнено с использованием модели пузырьковой кавитации, основанной на предположении об испарении некоторого объема жидкой части расчетных ячеек, в которых абсолютное статическое давление в жидкости опускается ниже величины давления насыщенного пара вещества [6]; базовая идея представлена в [13].

Задача решалась в двумерной осесимметричной постановке в виде сектора с углом 1° . На рис. 3 показаны схема расчетной области и расстановки граничных условий.

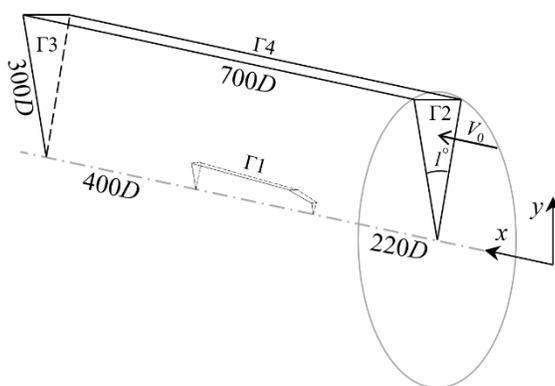


Рис. 3. Схема расчетной области и расстановки граничных условий
Fig. 3. The layout of the computational domain and boundary conditions

Граничные условия:

- поверхность ударника (Г1) – условие непротекания.
- торцы цилиндра (Г2, Г3) – скорость потока ($V = V_0$) и давление ($P = P_\infty$).
- боковая поверхность цилиндра (Г4) – свободный выход ($\partial/\partial n = 0$).
- на плоскостях, образующих сектор – симметрия.

В начальный момент времени $t = 0$ в объеме задаются скорость ($V = V_0$) и статическое давление ($P = P_\infty$).

Расчетная сетка – неструктурированная, шестигранная вдали от криволинейных поверхностей, с автоматической адаптацией по границе раздела сред и поверхности кавитатора. Критерием для обоснования сеточной сходимости был принят коэффициент сопротивления ударника, образованный избыточным давлением на кавитаторе. Согласно различным источникам, значение коэффициента сопротивления формы для дискового кавитатора при нулевом числе кавитации находится в диапазоне $C_{x0} = 0.79 \dots 0.82$ [14–16]. На рис. 4 представлена расчетная сетка в окрестности ударника (а) и кавитатора (б), при которой среднее значение коэффициента сопротивления составляет $C_{x0} = 0.81$. При этом шаг адаптированной сетки в долях диаметра кавитатора вблизи его и на границе каверны составил $1/18 d$.

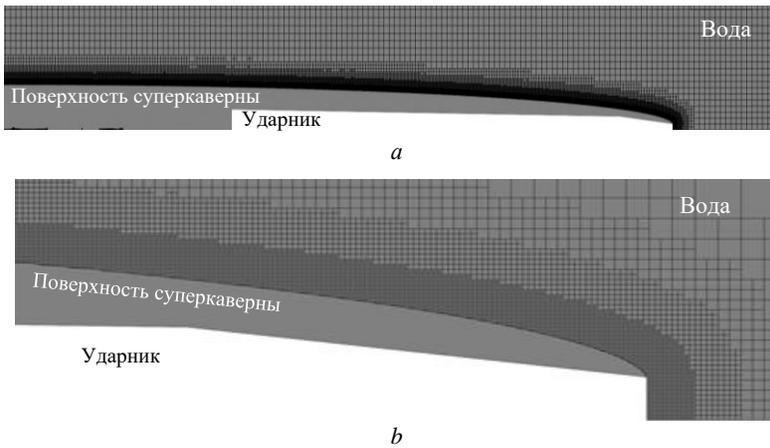


Рис. 4. Иллюстрация адаптации расчетной сетки к решению в окрестности ударника (а) и кавитатора (б)
Fig. 4. Illustration of the computational grid adjustment to the solution in the vicinity of the (a) projectile and (b) cavitator

Результаты расчетов, сравнение с экспериментом

Расчеты обтекания ударника проведены для скоростей набегающего потока 113 и 356 м/с при атмосферном давлении 10^5 Па. На рис. 5 изображены изолинии давления, в каждой точке которых величина давления имеет постоянное значение.

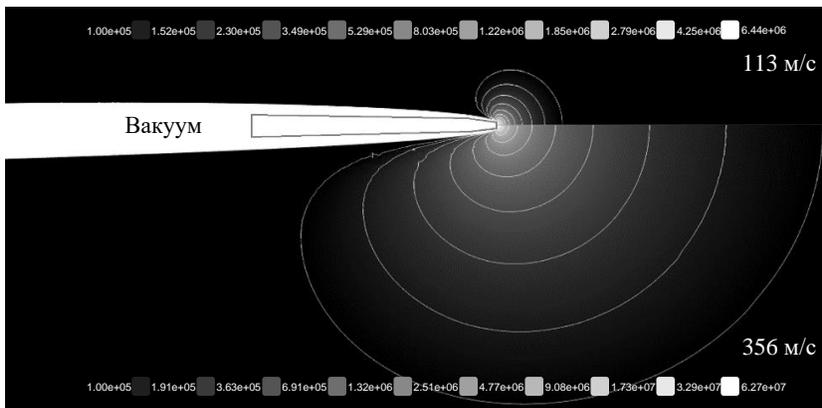


Рис. 5. Поле давления вокруг ударника при различных скоростях потока
Fig. 5. Pressure field around the projectile at various flow velocities

Верхняя часть рисунка соответствует полю давления вокруг ударника для скорости 113 м/с, нижняя часть – 356 м/с. С ростом скорости потока наблюдается радиальное расширение зоны повышенного давления: при скорости потока 113 м/с поле избыточного давления сосредоточено преимущественно в области кавитатора, а при скорости 356 м/с эта область соизмерима с длиной корпуса ударника. Согласно расчету, максимальное давление у поверхности кавитатора

сосредоточено в его центре и снижается по мере перемещения к кромке, у которой происходит интенсивный спад. В точке нулевой скорости, соответствующей центру кавитатора, реализуется максимальное давление P_{\max} , соответствующее давлению торможения P_t , величину которого можно выяснить аналитически:

$$P_t = P_0 + \frac{\rho V^2}{2}, \quad (8)$$

где P_0 – давление в набегающем потоке, принятое равным 10^5 Па. Давление торможения соответствует идеальному приближению, и отношение между аналитическим и численным расчетом можно охарактеризовать как ошибку полученного решения. В таблице приведено сравнение численной и аналитической величин давления торможения при рассматриваемых скоростях потока. Как видно из приведенных в таблице результатов, расхождение численного и аналитического решения составляет не более 1.3%, что говорит о хорошем их соответствии.

Аналитическое значение давления торможения в точке нулевой скорости и максимальное давление в области кавитатора, полученное в численном расчете

V , м/с	P_t , МПа	P_{\max} , МПа	P_t/P_{\max} , %
113 м/с	6.49	6.44	0.8
356 м/с	63.5	62.7	1.3

На рис. 6 приведены изолинии радиальной скорости (V_y) потока вокруг ударника при различных скоростях набегающего потока. Видно, что с увеличением скорости набегающего потокакратно возрастает область, в которой наблюдается радиальная составляющая течения жидкости вокруг ударника.

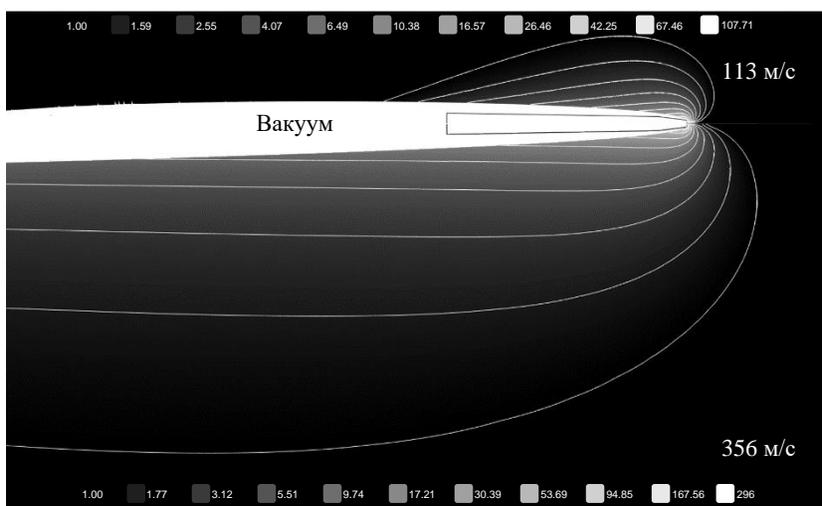


Рис. 6. Поле радиальной скорости вокруг ударника при различных скоростях потока
Fig. 6. Radial velocity field around the projectile at various flow velocities

На рис. 7 приведены расчетные и экспериментальные профили суперкаверн вокруг ударника при скорости движения 113 и 356 м/с; символами показаны результаты обработки фотографий (см. рис. 1), пунктирной линией – расчет по по-

луэмпирической аппроксимации [2], сплошными линиями показаны изолинии, соответствующие значению объемной доли фазы $f = 0.5$, что соответствует границе раздела сред.

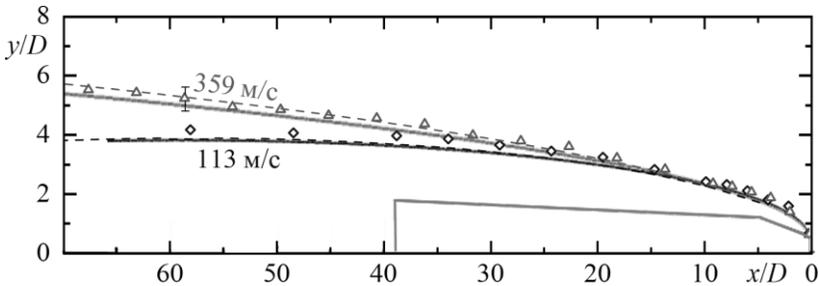


Рис. 7. Расчетные и экспериментальные профили суперкаверн вокруг ударника:
 \diamond , Δ – эксперимент; - - - - расчет согласно [2]; — — численный расчет

Fig. 7. Calculated and experimental profiles of the supercavities around the projectile:
 \diamond , Δ – experiment; - - - - calculation according to [2]; and — — numerical calculation

Полученная в численном расчете форма профиля суперкаверны вокруг ударника для обоих рассмотренных случаев демонстрирует хорошее количественное совпадение с экспериментальными данными НИИ ПММ ТГУ в пределах принятой погрешности локализации границы профиля суперкаверны по фотографиям ± 2 пикселя ($\approx \pm 0.8$ мм). Результаты также близко совпадают с данными сторонних авторов.

Соответствие результатов численного моделирования с физическим экспериментом и полуэмпирическими данными других авторов показывает хорошее соответствие построенной расчетной модели реальной картине физических процессов, происходящих при высокоскоростном квазистационарном обтекании ударника на рассмотренных скоростях.

Заключение

В работе показано, что задачи квазистационарного обтекания высокоскоростным дозвуковым потоком воды тела вращения с затупленным передним торцом в указанных случаях сводятся к механической задаче об определении движения идеальной несжимаемой жидкости под действием заданных сил.

Показано, что при движении ударника в воде при скорости 356 м/с температура торможения в точке нулевой скорости отличается от температуры среды не более чем на 15 К, что позволяет не учитывать процессы теплопереноса при решении задачи об установлении профиля суперкаверны за телом.

С учетом данных допущений на базе отечественного программного комплекса FlowVision построена расчетная модель и выполнено численное моделирование процесса обтекания высокоскоростным дозвуковым потоком воды тела вращения с затупленным передним торцом. Получены поля распределения давления и радиальной скорости для скоростей набегающего потока от 113 до 356 м/с, а также форма профиля суперкаверны.

Полученное в результате численного моделирования среднее значение коэффициента сопротивления дискового кавитатора ($C_{s0} = 0.81$) хорошо согласуется

с результатами физического эксперимента. Сравнение результатов расчета максимального давления на кавитаторе с аналитическим, которое соответствует давлению торможения, показало, что при скорости потока 113 м/с ошибка составила 0.8%, при скорости 356 м/с – 1.3%. Получено качественное и количественное согласование с экспериментами по профилю суперкаверны вокруг ударника в пределах принятой погрешности локализации границы профиля суперкаверны по фотографиям.

Достигнутые результаты хорошего и близкого соответствия результатов численного моделирования с физическим экспериментом и полужемпирическими данными других авторов показывают хорошее соответствие построенной расчетной модели реальной картине физических процессов, происходящих при высокоскоростном квазистационарном обтекании ударника на дозвуковых скоростях, что позволяет рекомендовать программный комплекс FlowVision для решения указанных задач.

Список источников

1. Логвинович Г.В. Некоторые вопросы глассирования и кавитации // Труды ЦАГИ. 1980. № 2052. С. 250–270.
2. Савченко Ю.Н. Исследование суперкавитационных течений // Прикладна гідромеханіка. 2007. Т. 9, № 2. С. 150–158.
3. Lu R., Pan G., Tan K., Yin S. Numerical simulation of cavitation and damping force characteristics for a high-speed supercavitation vehicle // J. Mar. Sci. Eng. 2021. V. 9 (11). Art. 1171. doi: 10.3390/jmse9111171.
4. Zhang L., Zhang C., Jia H., Dong R. Effects of lateral flows on the supercavitation and hydrodynamic characteristics of underwater series and parallel high-speed projectiles // J. Mar. Sci. Eng. 2023. V. 11 (4). Art. 878. doi: 10.3390/jmse11040878
5. Chen J., Jia H., Zhang L., Wang Z., Xie R. Examining the Influence of the Water Entry Velocity of Projectiles on Supercavity Flow and Ballistic Characteristics under Wave Conditions // Journal of Applied Fluid Mechanics 2024, V. 17 (5). P. 967–979. doi: 10.47176/jafm.17.05.2330
6. FlowVision. Руководство пользователя. Версия 3.14.02. 2024. 346 с.
7. Аксёнов А.А. FlowVision: индустриальная вычислительная гидродинамика // Компьютерные исследования и моделирование. 2017. Т. 9, № 1. С. 5–20.
8. Буйвол В.Н. Тонкие каверны в течениях с возмущениями. Киев : Наук. думка, 1980. 296 с.
9. Kinzel M., Krane M., Kirschner I., Moeny M. A numerical assessment of the interaction of a supercavitating flow with a gas jet // Ocean Engineering. 2017. V. 136. P. 304–313. doi: 10.1016/j.oceaneng.2017.03.042
10. Краснов Н.Ф. Аэродинамика : учебник для вузов. 2-е изд., перераб. и доп. М. : Высш. школа, 1976. Ч. 1: Основы теории. Аэродинамика профиля крыла. 314 с.
11. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. М. : Физматлит, 1963. Т. 2. 727 с.
12. Hirt C.W., Nichols B.D. Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries // J. Comput. Phys. 1981. V. 39 (1). P. 201–225. doi: 10.1016/0021-9991(81)90145-5
13. Sauer J., Schnerr G.H. Development of a new cavitation model based on bubble dynamics // ZAMM – Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2001. V. 81. P. 561–562. doi: 10.1002/zamm.20010811559
14. Кнэпп Р., Дейли Дж., Хэммит Ф. Кавитация. М. : Мир, 1974. 688 с.
15. Klose G.J., Acosta A.J. Some new measurements on the drag of cavitating disks // J. Ship Res. 1965. V. 9 (2). P. 102–104. doi: 10.5957/jsr.1965.9.3.102
16. Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости : пер. с англ. М. : Мир, 1973. 758 с.